TRABAJO PRÁCTICO Nº 2 **A.M. II - 2014**

INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES

1 - Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 \int_1^3 \left(x^2 y - 3\right) dy\, dx$

b) $\int_0^{\pi} \int_0^1 x \, sen\, y \;\; dx\, dy$

d) $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 - x^2} \;\; dy\, dx$

e) $\int_0^2 \int_{3y^2 - 6y}^{2y - y^2} 3y \;\; dx\, dy$

---

2. Grafique la región de integración y exprese la integral invirtiendo el orden de integración.

a) $\int_0^2 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} f(x,y)\, dy\, dx$

b) $\int_0^1 \int_{x^4}^x f(x,y)\, dy\, dx$

---

3 - Dibuje la región de integración, calcule la integral y verifique el resultado invirtiendo el orden de integración

a) $\int_{-1}^4 \int_1^2 (x + y^2) \; dy\, dx$

b) $\int_0^2 \int_{3y^2 - 6y}^{2y - y^2} 3y\, dx\, dy$

c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} 3x^2 \; dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} 3x^2 \; dy\, dx$

d) $\int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2} \;\; dx\, dy$

e) $\int_0^2 \int_x^{2x} \frac{y}{x^2 + y^2}\, dy\, dx$

---

4 - Calcule el área de las siguientes regiones planas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} xy = 9 \\ y = x \\ y = 0 \\ x = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y^2 = x/2 \\ y^2 = x - 4 \end{cases}$

---

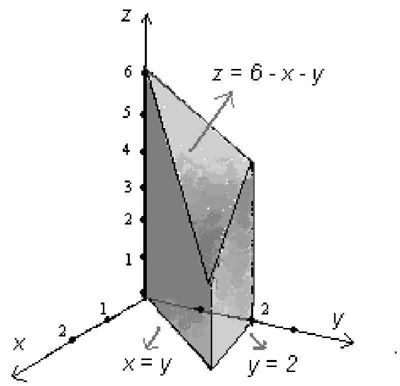
5 - a) Calcule la integral de f(x,y) = $(x + y)^{-2}$, sobre la región limitada por y = x ; y = 2x ; x = 1 y x = 2.

6.- Usando integrales dobles determine el volumen de los siguientes sólidos:

a) Tetraedro en el 1º octante acotado por el plano $3\,y + z + 2\,x = 12$.

b) Acotado por la superficie $y = x^2$ y los planos $x = 0$, $z = 0$ e $y + z = 1$ en el 1º octante.

c)



d) acotado por los cilindros parabólicos $z = x^2$; $z = 2 - x^2$ y los planos $y = 0$ y $z + y = 4$

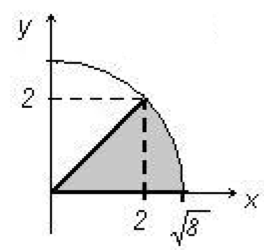
---

7 - Si f es la función dada por $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y R la región sombreada, plantee la integral $\iint_R f\ dA$:

a) en coordenadas cartesianas,

b) en coordenadas polares.

c) Calcule su valor.



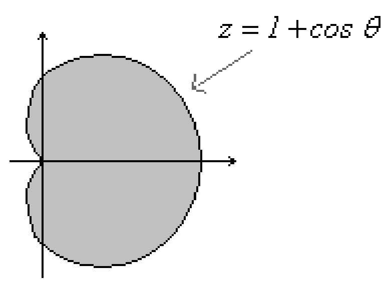
---

8 - Mediante coordenadas polares calcule las siguientes áreas y volúmenes:

a) Área de un pétalo de la rosa de cuatro hojas $r = p\ sen 2\theta$.

b) Área de la región interior al círculo $r = 4\cos\alpha$ y exterior al círculo $r = 2$.

c) Área de la región sombreada:



d) Volumen del sólido que está debajo del cono $z^2 = x^2 + y^2$, por encima del plano xy y acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

e) Volumen del sólido limitado por paraboloide $z = x^2 + y^2$; el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y $z = 0$.

---

9 - Encuentre la masa, el centro de masa y momentos de inercia I_x, I_y, I_0 de una lámina plana con la forma y densidad indicada en cada caso:

a) triángulo con vértices $(0, 0)$, $(4, 6)$, $(8, 0)$ y densidad $\rho = k\,y$.

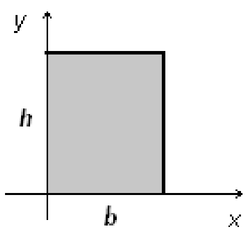
b) región acotada por , $y = 0$, $y = x$, $\rho = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

c) limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$, siendo la densidad $\rho(x,y)$ proporcional al cuadrado de la distancia de P al eje de las y, siendo la constante de proporcionalidad un valor positivo.

---

10 - Para las regiones siguientes verifique los momentos dados, considerando densidad $\rho(x,y) = 1$:

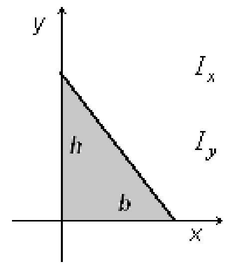
a)



$$I_x = \frac{1}{3} b\,h^3$$

$$I_y = \frac{1}{3} b^3\,h$$

b)



$$I_x = \frac{1}{12} b\,h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} b^3\,h$$

INTEGRALES TRIPLES

---

11 - Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^4 \int_2^3 (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\;dz\,dy\,dx$

c) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{e^2} \int_0^{1/xz} \ln z\;dy\,dz\,dx$

d) $\displaystyle\iiint_D z\,dV$ donde D es la parte del interior del cono $z^2 + 9x^2 = y^2$ que corresponde al 1º octante, para $0 \le y \le 9$.

e) $\displaystyle\iiint_E x\,dV$ donde E está bajo el plano $z = x + 2y$ y encima de la región del plano xy acotada por las curvas $y = x^2$, $y = 0$, $x = 1$.

---

12 - Mediante integrales triples halle el volumen de los siguientes sólidos:

a) Acotado por $z = 9 - x^2$, $y = -x + 2$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$.

b) Acotado por $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, primer octante.

c) del sólido limitado por la superficie $z = 4 - x^2$ y los planos $2x + y = 6$; $x = 0$; $y = x$; $z = 0$.

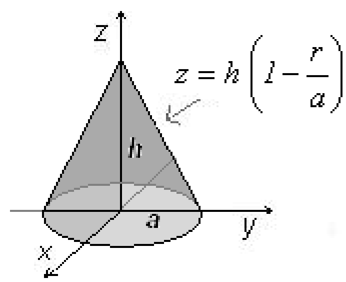
d) del sólido determinado por $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 - z \\ -\sqrt{4-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-z^2} \\ -2 \leq z \leq 2 \end{cases}$

---

13 - Utilice coordenadas cilíndricas o esféricas para calcular:

a) $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{4} x\,dz\,dy\,dx$

b) Volumen del cono:



c) $\iiint_S x^2\, dV$, donde **S** es el sólido que está entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$, encima del plano $z = 0$ y debajo del cono $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

d) el volumen de la región **E** acotada por $z = x^2 + y^2$ y $z = 36 - 3x^2 - 3y^2$.

e) Volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

f) Volumen del sólido que está encima del cono $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ y debajo de la esfera $\rho = 4\cos\varphi$.

g) Volumen del sólido que está encima del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

h) del cuerpo limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el paraboloide elíptico $x^2 + y^2 = 3z$.

---

14 - Halle el centro de masa de:

a) del sólido con densidad constante igual a 1 acotado por

$$z = 1 - x^2, \quad y = -1, \quad y = 1, \quad z = 0.$$

b) del sólido limitado por las superficies $y^2 = x$; $x = 0$; $z = 0$; $y = 1$; $z = y$, siendo $\rho(x,y,z) = k\,(x + 2z)$.

---

15 - Halle el centro de masa y los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados de la lámina

plana $\begin{cases} 0 \le r \le a \\ a > 0 \\ -\pi/4 \le \varphi \le \pi/4 \end{cases}$, siendo la densidad de masa ρ(x,y,z) = 1

Optativos:

INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES

1 - Calcule las siguientes integrales:

a) $\int_0^{\ln 3} \int_0^1 x\, y\, e^{x y^2}\, dy\, dx$ b) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\, dx\, dy$

---

2. Grafique la región de integración y exprese la integral invirtiendo el orden de integración.

a) $\int_0^3 \int_{-\sqrt{4-y}}^{y-2} f(x,y)\, dx\, dy + \int_3^4 \int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\, dx\, dy$ b) $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\, dy$

---

3 - Dibuje la región de integración, calcule la integral y verifique el resultado invirtiendo el orden de integración

a) $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} (x+y)\, dx\, dy$

b) $\int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \frac{3}{4}(4-x-2y)\, dy\, dx$

c) $\int_0^2 \int_{y/2}^{1} y\, e^{x^3}\, dx\, dy$

---

4 - Calcule el área de las siguientes regiones planas:

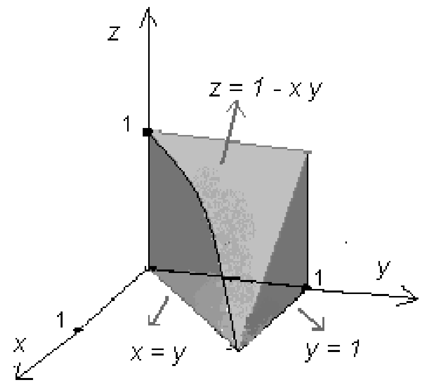
a) $\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ y = 0 \\ y = (x+1)^2 \end{cases}$

5- Calcule $\iint_D x^2 . y^2\, dx\, dy$ siendo D la región acotada del primer cuadrante situada entre las hipérbolas x y = 1 y x y = 2 y las líneas rectas y = x e y = 4x. Use el cambio de variables u = x y ; v = y/x

---

6.- Usando integrales dobles determine el volumen de los siguientes sólidos:

a)



b) acotado por z = 4 – y^2 y los planos y = x ; z = 0 y x = 0.

---

7 - Determinar *a* de modo que el volumen interior del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen del hemisferio.

INTEGRALES TRIPLES

8 - Calcule las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} y \; dz\, dy\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} seny \; dz\, dx\, dy$

---

9 - En cada caso esboce la región sólida cuyo volumen representa la integral triple, reescriba la integral en el los 2 órdenes de integración distintos y calcule dicho volumen por el orden mas conveniente:

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-y} dz dx dy$ b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dx\, dy$

---

10 - Mediante integrales triples halle el volumen de los siguientes sólidos:

a) del sólido limitado por la superficie z = 4 – x^2 y los planos 2 x + y = 6 ; x = 0 ; y = x ; z = 0.

b) acotado por: $z = y, \quad y = x^2, \quad y = 4, \quad z = 0.$
